

LOGARÍTMOS: UMA FERRAMENTA PRÁTICA E SOLUTIVA NAS ATIVIDADES DE HIDRÁULICA, ENTRE OUTRAS ABORDAGENS INTERDISCIPLINARES

Alexandre Franco Fernandes

Acadêmico em Engenharia Civil IFMS. Bacharel em Ciências Militares AMAN 1992 Curso de Oficiais de Engenharia. Mestre em Aplicações Militares EsAO 2001.

<https://orcid.org/0009-0002-5012-3378>

E-mail: Franco_cap2004@yahoo.com.br

Jefferson de Arruda

Mestrado Profissional em Matemática (2013-2015) Unb, Brasil. Graduação em Matemática – Lic. Plena UFMS. Curso técnico/profissionalizante em andamento IFMS.

<https://orcid.org/0009-0001-7603-2880>

E-mail: jeferson.arruda@ifms.edu.br

Zeliane Rezende Sandoval Fernandes

Mestrado em Educação (2015-2017) USCB, Brasil. Graduação em Pedagogia – Lic. Plena UCDB.

<https://orcid.org/0009-0001-5198-7402>

E-mail: zelianer@gmail.com

DOI-Geral: <http://dx.doi.org/10.47538/RA-2026.V5N1>

DOI-Individual: <http://dx.doi.org/10.47538/RA-2026.V5N1-84>

RESUMO: Este trabalho dissertativo traz uma proposta de aplicação prática, sobretudo, em equações de Hidráulica que se reveste de importância para o campo da Engenharia Civil. Bem como, trata-se de ferramenta útil, a fim de extrair expoentes fracionários de suas bases infinitamente pequenas e próximas do zero. Entretanto, positivas e de todo modo, facilitando a operação matemática com expressiva precisão. Ainda, em outros contextos, outras ciências, pode ser de significativa valia, como a Química e Biologia, na primeira empregada na medição do decaimento da matéria radioativa e, na segunda, no cálculo de cultura de bactérias e fungos em escala geométrica. Enfim, a compreensão do emprego de logaritmos não pode perder sentido, mesmo sabendo que outras ferramentas mais recentes e atualizadas poderão substituí-lo, eis que, pertence à sequência lógico-dedutiva no processo de aprendizagem, dos assuntos relativos à Matemática e Hidráulica.

PALAVRAS-CHAVES: Logaritmos. Aplicações. Hidráulica. Processo. Aprendizagem lógico-dedutivo.

LOGARITHMS: A PRACTICAL AND SOLUTIVE TOOL IN HYDRAULIC ACTIVITIES, AMONG OTHER INTERDISCIPLINARY APPROACHES

ABSTRACT: This dissertation presents a practical application proposal for logarithms, particularly in Hydraulic equations, which are of significant importance to the field of Civil Engineering. It serves as a useful tool for extracting fractional exponents from bases that are infinitely small and close to zero, yet positive, thereby facilitating mathematical operations with high precision. Furthermore, the study highlights the value of logarithms in other sciences, such as Chemistry, for measuring radioactive decay, and Biology, for calculating the geometric growth of bacterial and fungal cultures. Finally, it argues that

the understanding of logarithms remains essential; despite the emergence of modern tools, they are fundamental to the logical-deductive sequence in the learning process of Mathematics and Hydraulics.

KEYWORDS: Logarithms. Hydraulics. Logical-Deductive Learning.

INTRODUÇÃO

Segundo o PCN (Brasil, 1998), a tecnologia está presente na vida de toda a sociedade e isto se torna cada vez mais evidente ao longo de cada avanço tecnológico e descoberta. Eis que computadores, tablets em sua programação nada mais, nada menos, possuem reservas de espaços (memória RAM) de mantissaslogaritmos, que com a advento da programação expressam valores(resultados) equivalentes a nada mais que a lógica operacional da programação.

De acordo com o PCN (Brasil, 1998), no contexto escolar atual, os alunos estão sintonizados, intimamente, com a tecnologia, sobretudo, rede sociais e sobremaneira, em jogos virtuais. Não importam os valores educacionais vigentes, principalmente, valores motivados por interesses sociais, porque o ensino da Matemática se torna enfadonho e desmotivador.

Em uma análise crítica do contexto social contemporâneo (Séc. XXI), os logaritmos não têm a importância significativa de três décadas atrás, sendo injustificável o ensino nas escolas no Ensino Médio. De acordo com Lima (2013), verdadeiramente, sua aplicação como facilitador de operações matemáticas está em desuso, mas não descartada. Contudo, para a aprendizagem das funções exponenciais, usadas em equações da Biologia, bem como Química e Finanças, ainda não foi totalmente descartado.

Enfim, obsoleto ou não, ainda não houve com abstrair o uso da ferramenta, quando a lógica e intuição estão presente nas expressões matemáticas assegurando o fiel funcionamento de fenômenos hidráulicos do tema.

Logaritmo é um conteúdo de igual importância a Limites, Derivadas e Integração, todos pertinentes ao campo das Engenharias, assim como outras ciências. Nesse sentido, este artigo visa responder o questionamento: “como verificar a exatidão dos resultados alcançados nas equações de fenômenos naturais, especialmente em Hidráulica.

Segundo Rosa (2007, p. 28):

As aprendizagens vão acontecer em função das necessidades[...] assim, pode-se dizer que, para que ocorram as aprendizagens faz-se necessário um estado de alerta, impulso, vontade e desejo, ou seja, motivação.

Logo, a fim de motivar o aluno ao aprendizado, necessita-se de ferramentas. Especificamente, de acordo com o PCN (Brasil, 1998), a didática da Matemática na atualidade sugere seu emprego, para potencializar a aprendizagem. Éno intuito de despertar o interesse, a vontade de aprender logaritmos e outras ferramentas matemáticas. Dessa forma, este trabalho tem como objetivo propor demonstrações da aplicação de logaritmos, com o propósito de verificação da exatidão de resultados.

Para tanto, tal proposta apresenta atividades envolvendo aplicações em contextos do cotidiano da Hidráulica e de outras disciplinas, as quais podem ser solutivas com esta ferramenta e também, terem seus resultados confirmados. Esta proposta pode ser usada nas aulas de Matemática, bem como da Hidráulica, pelo professor da atualidade e toda comunidade escolar. Por meio da mesma, o ensino de logaritmos será significativo ao aluno e poderá despertar seu interesse pelo assunto, agilizando e motivando a aprendizagem. Uma vez que mostrará aplicações em situações concretas. Nas etapas do processo de construção da proposta apresentada há os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar a história dos logaritmos e das aplicações abordadas.
- Apresentar a definição e propriedades dos logaritmos demonstradas.
- Sugerir questões interdisciplinares e contextualizadas que envolvem a definição de logaritmos e suas propriedades.
- Confirmar os resultados das equações da Hidráulica por meio do logaritmo.
- A história do logaritmo

A história do desenvolvimento dos logaritmos relatada neste tópico foi encontrada na obra de Maor (2008). No intuito de ser usada em sala de aula, a história poderá significar de forma interdisciplinar as questões que serão abordadas mais adiante.

Afirma Maor (2008) que as tantas descobertas dos séculos XVI e XVII, sobretudo as pertinentes à Astronomia, exigiam muitos cálculos devido à quantidade de informações numéricas. Portanto, os cientistas da época careciam que este óbice fosse resolvido.

Encontrou-se no livro de Maor (2008, p. 15) a seguinte afirmação por John Napier, pai do logaritmo, que apresentou as dificuldades da época:

Percebendo que não há nada mais trabalhoso na prática da matemática, nem que mais prejudique e atrapalhe os calculadores, que as multiplicações, divisões, extrações de quadrados e cubos dos grandes números...comecei a considerar em minha mente, através de que tipo de arte certa e rápida poderia remover tais dificuldades.

De acordo com Maor (2008), esta dificuldade fora removida quando os logaritmos surgiram. As duas propriedades pelo fato de transformarem multiplicações em soma, divisões em subtrações e potências em multiplicações, mitigaram os laboriosos cálculos que dificultavam a vida dos cientistas, marcada por tantas descobertas importantes à humanidade.

Segundo Maor (2008), raramente uma invenção matemática abstrata foi tão bem aceita quanto a dos logaritmos. Afirma Maor (2008) que sendo Napier letrado em trigonometria, conhecia bem as fórmulas de prostaférese:

$$\begin{aligned}\sin(a) \cdot \sin(b) &= \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)] = \\ \frac{1}{2} [\cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) - \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b)] &= \\ \frac{1}{2} \times 2 \sin(a) \cdot \sin(b) &= \\ \text{"}\sin(a) \cdot \sin(b)\text{"} &\end{aligned}$$

Tais fórmulas, como se observa, transformam multiplicações em somas ou subtrações. A idéia por trás destas fórmulas foi que, certamente, colocou Napier no caminho da grande invenção da Matemática, ou seja, os logaritmos.

Segundo Maor(2008), outra ideia que contribuiu para esta grande inovação e corresponde aos termos de uma progressão geométrica. A sequência 1,2,4,8,16,32... tem razão 2, pois o próximo termo é resultado da multiplicação da anterior pela razão. Exemplo: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{n+1}$... Percebe-se que os termos de uma progressão geométrica são associados aos termos de uma progressão aritmética formada pelos expoentes acima observados.

Michel Stifel (1487-1567), alemão, mostrou-se que multiplicando termos “suis generis” de uma PG, terá o resultado idêntico ao somar-se os expoentes correspondentes, repetindo-se a mesma base. Então, $q^2 \cdot q^3 = q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = q^{2+3}$

$$= q^5$$

Analogamente, fazendo-se $\frac{q^3}{q^2} = q^{3-2} = q$, o que corresponde a subtrair os expoentes, quando dividimos os termos da PG.

Desta forma, Maor (2008, p. 19) explica a ideia de Napier:

Sua linha de pensamento era a seguinte, se pudermos escrever qualquer $N > 0$ como potência de algum N fixo (que será chamado de base), então, a multiplicação e divisão de números se equivalerá à adição ou divisão de seus expoentes. Em suma, cada operação aritmética será reduzida a que está abaixo dela na hierarquia das operações, o que reduzirá muito a dificuldade das programações numéricas.

$$N^0 = N^{+1-1}$$

$$N^{+1} / N^{+1} = 1$$

De acordo com Maor (2008), Napier dedicou-se 20 anos de trabalho na teoria em 1614 publicou o “MirificiL ogarithmorum Canonis Descriptio” (descrição da maravilhosa lei dos logaritmos). Este trabalho despertou interesse de todos os cientistas.

Por fim, no início de 1970 surgem as primeiras calculadoras eletrônicas manuais e tábuas de logaritmos perdem sua utilidade precípua. Dessa forma, seu papel primordial tornou-se obsoleto, porém, sua utilidade permaneceu tão viva e necessária como nunca.

LOGARÍTMOS, CONCEITOS E DEFINIÇÕES E DEMONSTRAÇÕES

Dante(2000) traz as definições e propriedades de logaritmos da seguinte forma:

Dados os números reais positivos a e b com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então c é expoente do logaritmo de b , na base a (mostra gráfico da função logaritmo para esclarecimento).

Como consequências das definições tem-se;

$\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, qualquer que seja $a > 0$ e $a \neq 1$

$\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$

$\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$, para todo $a > 0$ e $a \neq 1$ e para todo n .

$a^{\log_a n} = n$, com $n > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$

justificativa:

$$\log_a n = x \Leftrightarrow a^x = n \rightarrow$$

$$\log_a^b c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y, \text{ com } x > 0, y > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

justificativa:

Se $\log_a x = r$ e $\log_a y = s$, isto é, $a^r = x$ e $a^s = y$, tem-se:

$$x = y \rightarrow a^r = a^s \rightarrow r = s \rightarrow x = y$$

Portanto, $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, com $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$

PROPRIEDADES

Produto

$$\log_a (M.N) = \log_a M + \log_a N, \text{ para } M > 0, N > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Demonstração

$$\text{Considera-se } \log_a (M.N) = p; \log_a M = m \text{ e } \log_a N = n$$

$$a^p = M.N; a^m = M; a^n = N$$

$$a^p = a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \text{ então } p = m+n, \text{ ou seja, } \log_a (M.N) = \log_a M + \log_a N$$

Quociente

$$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N, \text{ para } M > 0, N > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Demonstração

$$\text{Considera-se } \log_a \left(\frac{M}{N}\right) = q; \log_a M = m \text{ e } \log_a N = n$$

$$a^q = \frac{M}{N}; a^m = M \text{ e } a^n = N$$

$$\text{Então, } a^q = \frac{M}{N} = a^m \div a^n = a^{m-n}$$

Se $a^q = a^{m-n}$, então $q = m-n$, ou seja,

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Potência

$$\log_a(M^N) = N \cdot \log_a M, \text{ para } M > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Demonstração

$$\text{Considere } \log_a(M^N) = r \text{ e } \log_a M = m$$

$$\text{Daí, } a^r = M^N \text{ e } a^m = M$$

$$\text{Então, } a^r = M^N = (a^m)^N = a^{N \cdot m}$$

$$\text{Se } a^r = a^{N \cdot m}, \text{ então } r = N \cdot m, \text{ ou seja, } \log_a(M^N) = [N \cdot \log_a M]$$

Mudança de Base

$$\text{Considere } \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}, \text{ para } N > 0, b > 0, a > 0, b \neq 1 \text{ e } a \neq 1$$

Demonstração

$$\text{Considere } \log_b N = p, \log_a N = q \text{ e } \log_a b = r$$

$$\text{Isso leva a } b^p = N; a^q = N \text{ e } a^r = b$$

$$\text{Fazendo as substituições}$$

$$N = a^q = b^p = (a^r)^p = a^{rp}$$

$$\text{Se } a^q = a^{rp}, \text{ então } q = r \cdot p \text{ e daí, } p = \frac{q}{r}$$

$$\text{ou } \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

LOGARITMOS NATURAIS

“Segundo Trotta (1988, p108), além dos logaritmos decimais, há certos ramos da Matemática, da Física e da Biologia, nos quais são utilizados os chamados logaritmos naturais, que tem por base o número de Euler.” Indicados por

$$\log_e a \text{ ou } \ln a$$

Esses logaritmos recebem esse nome, pois se observa que certos processos da natureza, como a reprodução de bactérias ou a desintegração de um átomo, são regidos por leis exponenciais que envolvem o número e.

A rigor define-se;

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e = 2,71828182845904523 \dots$$

Um exemplo adaptado da obra de Maor(2008), em que logaritmos e suas propriedades operatórias foram usadas para calcular, por mais de três séculos, até o advento das calculadoras nos idos de 70.

Para calcular a expressão: $x = \sqrt[3]{0,00010 \cdot (3 \times 10^2)^2}$

Antes das calculadoras, utilizava-se das propriedades operatórias dos logaritmos e de uma tábua com valores. Não se abordará o uso de tábuas de logaritmos, uma vez que o uso da calculadora agilizará a solução. Porém é interessante explorar este assunto em outra oportunidade, pois o intuito deste trabalho é aplicar a ferramenta como constatação do funcionamento dos fenômenos da hidráulica.

Agora, resolvendo a expressão acima.

Inicialmente, escrever-se-á como uma potência de expoente fracionário.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{10^{-5} \cdot (3 \cdot 10^2)^2} \\ x &= \sqrt[3]{10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^4} = \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-1}} = \sqrt[3]{0,3} \\ \text{Ou } 0,3\frac{1}{3} &= 0,6695 \approx 0,7 \end{aligned}$$

Agora, empregando logaritmos na igualdade, para certificar-se que a operação ou fenômeno apresentado pela mesma está correta. Portanto, os resultados precisam conferir.

$$\begin{aligned} \log x &= \log[0,3]^{\frac{1}{3}} \\ \log_{10} x &= \frac{1}{3} \cdot \log_{10} \frac{3}{10} = \frac{1}{3} \cdot [\log_{10} 3 - \log_{10} 10] \\ \log_{10} x &= \frac{1}{3} \cdot [0,4771 - 1] \\ \log_{10} x &= (-0,1743) = \\ x &= 10^{-0,1743} = \frac{1}{10^{0,1743}} = 0,6694 \approx 0,7 \end{aligned}$$

Verificando os resultados, aparece um erro de 0,0001 ou 1milimésimo de algarismos significativos. Este erro dependerá sempre das aproximações admitidas durante desenvolvimento da operação matemática.

Outro exemplo agora com uma das equações de vazão empregadas em reservatórios, onde:

$C_d = C_v \cdot C_c$ (produtos dos coeficientes de velocidade e contração);

$g = 9,8$ (aceleração da gravidade) e;

H = diferenças de cotas entre o nível superior e o nível de esgotamento;

A = área em m^2 do orifício

$Q = C_d \cdot A \cdot 2 \cdot g \cdot H = C_v \cdot C_c \cdot A \cdot 2 \cdot g \cdot H = 0,97 \cdot 0,63 \cdot 0,0002m^2 \cdot 2 \cdot 9,8 \cdot 2m = 0,77L/s$

Então, encontrar-se-á uma vazão de 0,77L/s

Empregando agora a ferramenta do logaritmo, chegaremos À um produto de logaritmos.

$$Q = 0,0001222 \cdot (39,2)^{1/2}$$

$$\log Q = \log 0,0001222 \cdot (39,2)^{1/2}$$

$$\log_{10} q = \log 0,0001222 + \log 39,2^{1/2}$$

$$\log_{10} q = -3,913 + \left(\frac{1}{2} \cdot 1,593\right) = -3,1164$$

$$Q = 10^{-3,116} = \frac{1}{10^{3,1164}} = 1103,116 = 0,0007655966m^3/s \times 1000L =$$

$$\text{ou } 0,7655 \approx 0,77l/s$$

Neste caso temos uma equação de Fair-Whipple-H.Shiao, para calcular perdas na tubulação hidráulica.

$$J = 0,0008795 \cdot \frac{0,002251^{1,75}}{0,05^{4,75}}$$

= 0,03093, neste caso, deve-se levar a constante 0,0008795 para o primeiro lado da igualdade, ficando;

$$\frac{j}{0,0008795} = \frac{0,002251^{1,75}}{0,05^{4,75}}$$

E aplicando-se log na igualdade fica,

$$\log \frac{j}{0,0008795} = \log \frac{0,002251^{1,75}}{0,05^{4,75}}$$

$$\log j - \log 0,0008795 = 1,75 \cdot \log 0,002251 - 4,75 \cdot \log 0,05$$

$$\log j + 3,0558 = -4,5536 + 6,1799$$

$$\log j = -3,0558 + 1,6263$$

$$\log j = -1,4295$$

$$j = \frac{1}{10^{1,4295}} = 0,0372$$

Aqui os resultados se aproximam menos, porém, desprezando o terceiro significativo encontra-se o valor 0,03, referente a perda na tubulação de 0,03 m.c.a. Então, qual seria o valor do expoente para que torna-se a igualdades exatamente o mesmo resultado?

Aplicando na equação logaritmos, ficaria.

$$\frac{1}{10^n} = 0,03093$$

$$10^{-n} = 0,03093$$

$$\log 10^{-n} = \log 0,03093$$

$$1^{-n} = -n \cdot \log 10 = \log 0,03093$$

$$-n = \log 0,03093$$

$n=1,51$; percebe-se que este valor está 0,08 unidades de 1,4295. Logo, um erro de 2 algarismo significativos. Um pouco mais expressivo que os anteriores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ligação entre o logaritmos e as equações de hidráulica foi percebida pelo fato de alguns gráficos, como o de Mood, terem suas curvas de vazão, em escala logarítmica. Daí, então, tendo chamado atenção para o emprego dessa ferramenta com mais de dois séculos de existência. Em que pese a sua aplicação, nota-se por seu emprego que é possível confirmar os resultados encontrados, sobretudo, na Hidráulica.

Possivelmente, em outros fenômenos científicos da Matemática, Biologia, Química e outros, seu apoio será de grande valia, assim como foi por muitos anos. Por este motivo, não poderá ser obsoleta, como citaram autores, mas solutiva no processo certificação de resultados.

REFERÊNCIAS

- ANGELIM, E. M. Logaritmos: História, Teoria e Aplicações Dissertação (mestrado profissional em Matemática -Profmat) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus BA, março 2015.
- DANTE, L. R. Matemática: Contexto e aplicações – São Paulo: Ática, 2011 vol 1.
- COUTO. S. D. Logaritmos: conceitos e aplicações. Dissertação (mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal de Lavras -MG.
- FELTRE, R. Química 6 ed São Paulo: Editora Moderna, 2004, v. 2 417p.
- LIMA, E. L. Curso de Análise 11 ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004 v.1 431p.
- LIMA, E. L. Logaritmos. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. 113p
- MAOR, E e: A História de um Número. 5. Ed Rio de Janeiro. Editora Record, 2008.

Submissão: novembro de 2025. Aceite: dezembro de 2025. Publicação: março de 2026.