

## A TORRE DE HANÓI EM SALA DE AULA: NO ENSINO DA MATEMÁTICA ATRAVÉS DE UM JOGO LÚDICO

**Dalvani Olegário Santos Arruda**

Graduada em Matemática. Mestra em Educação. Professora da rede pública.

<http://lattes.cnpq.br/3212037699172972>

E-mail: [olegariodalvani05@gmail.com](mailto:olegariodalvani05@gmail.com)

DOI-Geral: <http://dx.doi.org/10.47538/RA-2023.V2N4>

DOI-Individual: <http://dx.doi.org/10.47538/RA-2023.V2N4-04>

**RESUMO:** Este trabalho tem como objetivo apresentar uma técnica do jogo da Torre de Hanói em sala de aula no ensino da matemática através de um jogo lúdico com os alunos e professor em sala de aula que atua na área de matemática, que será desenvolvida na Escola Estadual professora Clara Téteo contendo 36 alunos do ensino médio. A pesquisa foi realizada por meio de estudos bibliográficos e pesquisa de campo, sendo desenvolvida com um grupo de alunos que participam de. Observou-se que a partir da utilização desse jogo com os alunos elucidaram-se conceitos matemáticos que eles tiveram contato na escola, assim como contribuíram para a aprendizagem de novos conceitos matemáticos. Como também utilizaremos o recurso literário que poderão investigar para o material da torre de Hanói como ferramenta de ensino na sala de aula e adotaremos uma abordagem na metodologia que é qualitativa contendo análise de dados quantitativa.

**PALAVRA-CHAVE:** Jogo Lúdico. Aprendizagem em Sala de Aula. Conceitos Matemáticos.

### THE TOWER OF HANOI IN THE CLASSROOM: TEACHING MATHEMATICS THROUGH A PLAYFUL GAME

**ABSTRACT:** This work aims to present a technique of the Tower of Hanoi game in the classroom in the teaching of mathematics through a playful game with students and a teacher in the classroom who works in the area of mathematics, which will be developed at the Escola Estadual professor Clara Téteo containing 36 high school students. The research was carried out through bibliographical studies and field research, being developed with a group of students who participate in. It was observed that from the use of this game with the students, mathematical concepts that they had contact with at school were elucidated, as well as contributed to the learning of new mathematical concepts. As we will also use the literary resource that you can investigate for the Hanoi tower material as a teaching tool in the classroom and we will adopt an approach in methodology that is qualitative containing quantitative data analysis.

**KEYWORDS:** Playful Game. Learning in the Classroom. Mathematical Concepts.

## INTRODUÇÃO

Nessa apresentação do Jogo lúdico na Torre de Hanói na matemática da cidade de Macau no Rio Grande do Norte e Escola Professora Clara Tetéo. Ele visa estimular o uso de estratégias mais envolventes no ensino da disciplina de matemática dessa área.

Objetivos: Nas atividades relacionadas à disciplina “*matemática*”, utilizaremos um conjunto de ferramentas que podem estar presentes em qualquer laboratório da referida matéria. Serão apresentados jogos, materiais concretos, softwares e instrumentos de medidas que podem ajudar o professor a proporcionar uma aula mais provocativa no sentido de conseguir uma participação mais ativa do aluno.

Objetivo Geral: Neste 3º encontro, será feita a apresentação de dois jogos matemáticos: as “Torres de Hanói”. Trata-se de jogos com nível de dificuldade relativamente alto e, justamente, por causa do ambiente desafiador que essa dificuldade pode proporcionar, pensamos ser adequado para a apresentação em sala de aula.

Objetivo Específico: Para cada jogo, num primeiro instante, será feita a iniciação ao jogo. Após a familiarização com o jogo, atividades serão propostas. Ao final de cada tópico abordado, exercícios serão expostos. Desafios e perguntas preencherão o andamento da atividade.

Justificativa: A culminância da atividade com as “Torres de Hanói” está na associação do jogo com um conteúdo matemático: a função exponencial. Assim possui outra meta: alcançar o objetivo do jogo (resolver as peças!), uma vez que o conteúdo matemático que ele possui ligação (Teoria de Grupos) não faz parte daquilo que é ensinado pelo professor de ensino médio. É salutar, porém, que o professor tenha consciência da essência matemática existente na atividade.

## HISTÓRIA E LENDA DA TORRE DE HANÓI

A torre de Hanói, também conhecida por torre do bramanismo ou quebra-cabeças do fim do mundo, foi publicada em 1883 pelo matemático francês Edouard Lucas, com o pseudônimo Prof. N. Claus (de Siam), um anagrama de seu nome. A publicação dizia que o jogo vinha do Vietnã, sendo popular também na China e no Japão, e acompanhava a caixa do quebra-cabeças. Também na publicação oferecia mais de um milhão de Francos para quem resolvesse o problema da Torre de Hanói com 64 níveis, seguindo as regras do jogo, indicando que o número de movimentos seria 2 elevado a 64 menos 1 = 18.446.744.073.709.551.615 o que daria cerca de 585 bilhões de anos, se cada movimento fosse feito em 1 segundo.

Edouard Lucas foi inspirado por uma lenda Hindu que falava de um templo em Benares, cidade santa da Índia, onde existia uma torre sagrada do bramanismo, cuja função era melhorar a disciplina mental dos monges jovens. A lenda dizia que, no início dos tempos, foi dado aos monges de um templo uma pilha de 64 discos de ouro, dispostos em uma haste, de forma que cada disco de cima fosse menor que o de baixo. A atribuição que os monges receberam foi transferir a torre, formada pelos discos, de uma haste para outra, usando a terceira como auxiliar com as restrições de movimentar um disco por vez e de nunca colocar um disco maior sobre um menor. Os monges deveriam trabalhar com eficiência noite e dia e, quando terminassem o trabalho, o templo seria transformado em pó e o mundo acabaria.

Em 1884, outro matemático francês, chamado De Parville, desenvolveu a seguinte história, que também costuma ser associada à Torre de Hanói. No grande templo de Benares, debaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há uma placa de bronze sobre a qual estão fixadas três hastes de diamante, cada uma com a altura do osso cúbito do braço e tão fina como o corpo de uma abelha. Em uma dessas agulhas, Deus, quando criou o mundo, colocou 64 discos de ouro puro, de forma que o disco maior ficasse sobre a placa de bronze e os outros decrescendo até chegar ao topo. Isto se constituiu na torre do bramanismo. Dia e noite, os monges transferiam incessantemente os discos de uma haste para outra, de acordo com as leis fixas e imutáveis do bramanismo, que exigiam que os monges nunca movessem mais de um disco por vez e nunca deixassem um disco maior ficar sobre um menor. Quando os 64 discos fossem transferidos para outra haste, a torre, o templo e as pessoas seriam transformados em pó e, com um estrondo, o mundo desapareceria.

O sol está em atividade há cerca de 5 ou 6 bilhões de anos e deverá continuar por igual período, quando entrará em colapso. Nessa fase, a camada de hélio no interior do sol terá crescido bastante e as camadas exteriores expandidas o suficiente para englobar a Terra, destruindo-a. Será o fim do mundo. Depois disso, os gases serão expelidos e o sistema solar será transformado numa estrela anã. Como a Terra tem cerca de 5 bilhões de anos, devendo durar igual período e a Torre de Hanói demoraria 585 bilhões de anos para ser resolvida, o mundo realmente acabará, mesmo antes do término do quebra-

cabeças. Até lá a humanidade já terá sido extinta ou terá tecnologia suficiente para mudar-se de planeta.

## COMO UTILIZAR OS JOGOS MATEMÁTICOS EM SALA DE AULA

Para ensinar matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Todos nós, professores de matemática, devemos procurar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, concentração, raciocínio lógico-dedutivo e o censo cooperativo, desenvolvendo a socialização e aumentando as interações dos alunos com as outras pessoas. O jogo se convenientemente planejado, pode ser um recurso pedagógico eficaz para a construção do conhecimento matemático.

Vygotsky afirmava que através do brinquedo a criança apreende a agir numa esfera cognitivista, sendo livre para determinar suas próprias ações. Segundo ele, o brinquedo estimula a curiosidade e a autoconfiança, proporcionando o desenvolvimento da linguagem, do pensamento, da concentração e da atenção.

O uso de jogos no ensino de matemática tem o objetivo de fazer com que os alunos gostem de apreender esta disciplina, mudando a rotina da classe e despertando o interesse do aluno envolvido. A aprendizagem através de jogos, como dominó, palavras cruzadas, jogos de tabuleiro, memória e outros, que permitam que o aluno faça da aprendizagem um processo interessante e até divertido. Para isso, os jogos devem ser utilizados ocasionalmente para sanar as lacunas que se produzem na atividade escolar diária. Nesse sentido, há três aspectos que por si só justificam a incorporação do jogo nas aulas: o caráter 29 lúdico, o desenvolvimento das técnicas intelectuais e a formação de relações sociais. Os jogos são educativos, sendo assim, requerem um plano de ação que permita a aprendizagem de conceitos matemáticos. Já que os jogos em sala de aula são importantes, devemos ocupar um horário dentro do nosso planejamento, de modo a permitir que o professor possa explorar todo o potencial dos jogos, processos de solução, registros e discussões sobre possíveis caminhos que poderão surgir. Os jogos podem ser utilizados para introduzir, amadurecer conteúdos e preparar o aluno para aprofundar os conteúdos já trabalhados. Devem ser escolhidos e preparados com cuidado para levar o aluno a adquirir conceitos matemáticos importantes. Devemos utilizá-los não como instrumentos

recreativos na aprendizagem, mas como facilitadores, colaborando para os bloqueios que os alunos apresentam em relação a alguns conteúdos matemáticos.

Segundo Malba Tahan (1968) “para que os jogos produzam os efeitos desejados é preciso que sejam, de certa forma, dirigidos pelos educadores”.

A partir do princípio que as crianças pensam de maneira diferente dos adultos e que nosso objetivo não é ensiná-las a jogar, devemos acompanhar a maneira como as crianças jogam, sendo observadores atentos, interferindo para colocar questões interessantes, mas sem perturbar a dinâmica dos grupos, para a partir disso, auxiliá-las a construir regras e a pensar de modo que elas entendam. Devemos escolher jogos que estimulem a resolução de problemas, principalmente quando o conteúdo a ser estudado for abstrato, difícil e desvinculado da prática diária, não nos esquecendo de respeitar as condições de cada comunidade e o querer de cada aluno. Essas atividades não devem ser muito difíceis e devemos testá-las antes de sua aplicação, a fim de enriquecer as experiências através das propostas de novas atividades, propiciando mais de uma situação. Os jogos trabalhados em sala de aula devem ter regras, esses são classificados em três tipos:

- Jogos estratégicos: São jogos onde são trabalhadas as habilidades que compõem o raciocínio lógico. Com eles, os alunos leem as regras e buscam caminhos para atingirem o objetivo final, utilizando estratégias para isso. O fator sorte não interfere no resultado.

- Jogos de treinamento: São os jogos que são utilizados quando o professor percebe que alguns alunos precisam de reforço num determinado conteúdo e quer substituir as cansativas listas de exercícios. Neles, quase sempre o fator sorte exerce um papel preponderante e interfere nos resultados finais.

- Jogos geométricos: São os jogos que têm como objetivo desenvolver a habilidade de observação e o pensamento lógico. Com eles conseguimos trabalhar figuras geométricas, semelhança de figuras, ângulos e polígonos.

Os jogos com regras são importantes para o desenvolvimento do pensamento lógico, pois a aplicação sistemática das mesmas encaminha a deduções. São mais adequados para o desenvolvimento de habilidades de pensamento do que para o trabalho com algum conteúdo específico. As regras e os procedimentos devem ser apresentados

aos alunos antes da partida a preestabelecer os limites e possibilidades de ação de cada jogador. A responsabilidade de cumprir normas e zelar pelo seu cumprimento encoraja o desenvolvimento da iniciativa, da mente alerta e da confiança em dizer honestamente o que pensa. Os jogos estão em relação direta com o pensamento matemático, em ambos temos regras, instruções, operações, definições, deduções, desenvolvimento, utilização de normas e novos conhecimentos.

O trabalho com jogos matemáticos em sala de aula nos traz alguns benefícios:

- Conseguimos detectar os alunos que realmente estão com dificuldades de aprendizagem.
- O aluno demonstra para seus colegas e para o professor se o conteúdo foi bem assimilado.
- Pode existir uma competição entre os alunos, pois almejam vencer e por isso aperfeiçoam-se e buscam alcançar seus limites.
- Durante o desenrolar de um jogo, observamos que os alunos se tornam mais críticos, alertas e confiantes, expressando o que pensam, elaborando perguntas e tirando conclusões sem necessidade da interferência ou aprovação do professor.
- Não existe o medo de errar, pois o erro é considerado um degrau necessário para se chegar a uma resposta correta.
- Os alunos se empolgam com o clima de uma aula diferente, o que faz com que apreendam sem perceber.

Mas, devemos também, ter alguns cuidados ao escolher os jogos a serem utilizados:

- Não tornar o jogo algo obrigatório.
- Escolher jogos em que o fator sorte não interfira no resultado do jogo, permitindo que vença aquele que descobrir as melhores estratégias.
- Utilizar atividades que envolvam dois ou mais alunos, para proporcionar a interação social.
- Estabelecer regras, que podem ou não serem modificadas no decorrer de um jogo.
- Trabalhar a frustração pela derrota na criança, no sentido de minimizá-la.



- Estudar o jogo antes de aplicá-lo aos alunos (o que só é possível jogando).

Não é necessário ressaltar a grande importância da solução de problemas, pois vivemos em um mundo no qual cada vez mais, exige que as pessoas pensem, questionem e se arrisquem, propondo soluções aos vários desafios que surgem no trabalho ou na vida cotidiana. Para a aprendizagem, de acordo com o tipo de jogo, é necessário que a criança tenha um determinado nível de desenvolvimento, as situações de jogo são consideradas parte das atividades pedagógicas, justamente por serem elementos estimuladores do desenvolvimento. É esse raciocínio de que os alunos apreendem através de jogos que nos levará a utilizá-los em sala de aula. Muito ouvimos falar que se deve vincular a teoria à prática, mas quase não o fazemos. Utilizar jogos como um recurso didático é uma chance que temos de fazê-lo. Eles podem ser usados em sala de aula como um prolongamento da prática habitual da aula, são recursos interessantes e eficientes, que podem auxiliar os alunos na compreensão de conteúdos matemáticos.

## **MATEMÁTICA E LUDICIDADE: UMA CONSTRUÇÃO PRAZEROSA**

Para fazer a diferença na vida dos educandos, é preciso construir uma prática pedagógica a partir de um novo paradigma. Deve-se repensar o currículo desenvolvido nas escolas. É indispensável que ele atenda às necessidades básicas do discente enquanto pessoa integrada em uma sociedade moderna. O currículo deve possibilitar ao aluno a busca e a construção de conhecimentos significativos. O professor de Matemática deve se conscientizar de que os conteúdos trabalhados na escola só se transformam em conhecimentos a partir do momento em que há significação para quem aprende. Por isso, é preciso mergulhar em uma concepção construtivista voltada para a ação construtora do aluno, para que ele possa organizar e integrar novos conhecimentos aos já existentes, por meio do raciocínio e iniciativas próprias. Essa construção não pode ocorrer no vazio, mas a partir de informações do objeto de seu conhecimento, possibilitando desafios, reflexões e interação com os outros.

No modelo construtivista defendido por Piaget (apud D'Ambrósio, 1990), para aprender alguma coisa é necessário partir dos conhecimentos que a criança já sabe. Como

as brincadeiras são linguagens que fazem parte do repertório da criança, pode-se uni-las à aquisição de saberes.

Assim, a criança será levada a tomar gosto por estar na escola e, aos poucos, sentirá que aprender não depende de tortura, que não é preciso desvincular sua vida dos acontecimentos da sala de aula. Para que a Matemática seja um fator de interação social, é preciso, por parte dos docentes, aguçar nos estudantes o prazer de aprendê-la e praticá-la. As atividades com jogos aparecem como grandes aliadas na busca desse prazer, pois com o lúdico, o professor não ensina, mas ajuda o aluno a encontrar caminhos por meio da criatividade, da imaginação e da tomada de iniciativas para encontrar os resultados desejados, bem diferentes da Matemática cheia de fórmulas e memorizações, que não exige do educando o raciocínio próprio, levando a resolver um determinado exercício muitas vezes sem compreender a lógica de suas ações, pois se o aluno só repete conhecimentos que outros já pensaram, a educação não está cumprindo o seu papel.

Segundo Piaget (apud Kamii, 1991):

Educar uma criança é prepará-la para inventar e descobrir. Portanto, um educador comprometido com seu aluno não deve achar que educar é ensinar soluções, dar explicações e criar habilidades.

Na concepção do autor deve ter consciência de que educar é preparar o discente para enfrentar novas situações ao longo da vida. Por isso, um ensino de qualidade deve buscar desenvolver a inteligência do educando, que, uma vez desenvolvida, lhe tornará apto a enfrentar mudanças e aprender coisas novas. Ao introduzirem-se jogos e brincadeiras na sala de aula, abre-se um leque de possibilidades que favorece uma aprendizagem construtiva, em que o aluno dificilmente fica passivo; ele participa, motivado não só pelo ato de brincar, como também pelos incentivos dos colegas, que socializam os conhecimentos e descobertas uns com os outros. Sendo assim, a Matemática abordada nos moldes tradicionais não condiz com as ideias inovadoras baseadas na construção ativa do conhecimento por parte de cada aluno uma vez que este modelo objetiva reforçar as desigualdades e as injustiças sociais, uma vez que poderá contribuir com a evasão escolar ou na formação de sujeitos alienados. Uma prática pedagógica que utilize atividades lúdicas favorece a autonomia dos educandos.



Segundo Piaget, citado por Kamii (1991, p.54), “Uma educação conformista ou escola tradicional não encoraja o pensamento crítico nem o independente”.

As escolas precisam encorajar a autonomia do princípio, se quiserem, eventualmente, serem bem sucedidas em ajudar indivíduos a atingirem níveis mais altos de desenvolvimento emocional e cognitivo. Não podemos esperar que as crianças submetam-se aos pais coercivos e às pressões da escola durante os primeiros dez anos (ou mais) e então, mais tarde, de súbito, serem autônomas e terem iniciativas”. Realmente, a maioria esmagadora dos alunos são manipulados, tendo seus pensamentos e suas criatividade podadas por uma educação autoritária que ainda ousa objetivar a formação de cidadãos autônomos. Não se pode esquecer que uma nação é o retrato do que acontece nas escolas. Se se quer um país com pessoas reflexivas, atuantes e protagonistas, deve-se começar a transformar o modo de agir nas salas de aula. Referir-se ao ensino da Matemática por meio de Jogos de Regras, significa proporcionar ao público-alvo o desenvolvimento de características não somente curriculares, que são as competências cabíveis a cada modalidade de ensino, mas também sociais e cognitivas. Quando é proposto um desafio em sala, deve-se possuir estratégias, objetivos e metodologias bem estruturadas para se alcançar o fim desejado.

Toda atividade com Jogo exige de seu participante atenção para reter informações e compreender as regras que serão utilizadas, percepção da problemática que será trabalhada, raciocínio para “desvendar” o segredo do problema no menor espaço de tempo possível pois o jogo faz com que o seu competidor deseje resolvê-lo antes dos demais participantes e a imaginação para traçar caminhos que o levem a vitória A atenção é a concentração da mente sobre partes selecionadas do campo da consciência, dando aos elementos escolhidos uma peculiar nitidez e clareza. O campo da atenção pode ser dividido em duas partes: o foco da atenção (onde o grau de concentração da atenção é máximo) e a margem da atenção (esta vai diminuindo gradualmente até desaparecer).

Relativamente à sua gênese, a atenção pode ser involuntária, passiva e espontânea (determinada por estímulos externos) ou voluntária, controlada e dirigida (conduzida pela intenção do sujeito). Já a percepção é a apreensão dos objetos vulgares dos sentidos, tais como as árvores, as casas, as cadeiras, na ocasião da estimulação sensorial. A percepção distingue-se da sensação e dos processos superiores de ideação, como a imaginação, a

recordação, a concepção e o raciocínio. O objeto de percepção ou o seu veículo consiste nas qualidades sensíveis atualmente dadas pelas qualidades fornecidas pela imaginação, com base na experiência anterior atribuída ao objeto percebido. A ideia de percepção consiste em afirmar que, através das capacidades de processamento de informação do sistema cerebral e sensorial humano, conhece-se o mundo externo e objetivamente real. O raciocínio é o ato ou processo de exercitar a mente e faculdade de conectar juízos. O raciocínio também é o processo de pensamento de discussão, debate e argumentação e a manifestação da propriedade discursiva da mente, através do uso efetivo de argumentos com o propósito de convencer ou persuadir.

O raciocínio visa o desenvolvimento ordenado do pensamento com o objetivo de obter uma conclusão considerada válida. A imaginação designa um processo mental que consiste na reanimação de imagens sensíveis provenientes de percepções anteriores (imaginação reprodutiva) e nas combinações destas imagens elementares em novas unidades (imaginação criativa ou produtiva). A imaginação criativa é de dois tipos: a fantasia, que é relativamente espontânea e incontrolada, e a imaginação construtiva, que é exemplificada na ciência, na invenção e na filosofia, sendo controlada por um plano ou objetivo dominante. Nessa última pode ser evidenciada a capacidade de ler problemas matemáticos e buscar a sua resolução.

## **A UTILIZAÇÃO DO JOGO NA EDUCAÇÃO AO LONGO DA HISTÓRIA**

Procurando pontuar a utilização dos jogos na educação nos diferentes momentos históricos, tomamos como referência os estudos de Kishimoto (2003). A autora, analisando o emprego do brinquedo na educação ao longo da evolução histórica, verifica que não existem estudos históricos acerca da evolução do brinquedo no Brasil, por isso a necessidade de adotar como parâmetro a história do brinquedo na sociedade francesa. Nesta, a evolução do brinquedo acompanha os grandes períodos da civilização ocidental.

Segundo a autora, é na antiga Roma e na Grécia que acontece o nascimento das primeiras reflexões em torno da importância do brinquedo na educação. Platão verifica a importância de se aprender brincando, em oposição à utilização da violência e da opressão. Já Aristóteles, sugere para a educação de crianças pequenas, o uso de jogos que

imitem atividades sérias, de ocupações adultas, como forma de preparo para a vida futura. Nessa época, ainda não se discutia o emprego do jogo como recurso para o ensino da leitura e do cálculo. Seguindo a evolução histórica, a autora pontua que no advento do Cristianismo ocorreu o distanciamento do desenvolvimento da inteligência, uma vez que predominou a educação disciplinadora, sobretudo com a imposição de dogmas. Porém no momento, não houve condições para a expansão dos jogos, os quais eram considerados delituosos.

A autora evidencia que durante o Renascimento ocorreu o aparecimento de novo ideal carregado de paganismo, trazendo outras concepções pedagógicas. Desta forma, a utilização do jogo é empregada no cotidiano dos jovens, mas não como diversão, e sim como tendência natural do ser humano. Neste período foi criado o jogo de cartas educativo. Através autora, no século seguinte continua a expansão dos jogos de caráter educativo. Filósofos apontam a importância das imagens e dos sentidos para a apreensão do conhecimento. Desta forma, multiplicam-se jogos de leitura e também diversos jogos destinados à tarefa didática nas áreas de História, Geografia, Moral, Religião, Matemática, entre outras.

No século XVIII, nasce a concepção de infância e neste período se verifica a necessidade de uma educação ajustada à natureza infantil. Consequentemente há o nascimento da Psicologia Infantil. No início do século XIX, ocorre o surgimento das inovações pedagógicas: a autora cita Froebel, o qual enfatiza que o jogo, entendido como objeto e ação de brincar deve fazer parte da história da educação pré-escolar, pois o autor tem a concepção que, manipulando e brincando com materiais como bola, cubo e cilindro, montando e desmontando cubos, a criança estabelece relações matemáticas e adquire noções primárias de Física e Metafísica.

Já no século XX começa a produção de pesquisas e teorias que discutem a importância do ato de brincar para a construção de representações infantis. Estudos e pesquisas de Piaget, Bruner, Vygotsky, entre outros, evidenciam pressupostos para a construção de representações infantis relacionadas às diversas áreas do conhecimento. Com a expansão de novos ideais, crescem as experiências que introduzem o jogo com o intuito de facilitar tarefas do ensino.

## O DESENVOLVIMENTO COGNITIVO DE ALUNOS DE ENSINO FUNDAMENTAL E O ENSINO DA MATEMÁTICA

Para o desenvolvimento desse trabalho, inicialmente deve-se pensar como se dá o processo de aprendizagem nos estudantes do Ensino Fundamental, e mais, como estes podem conciliar diversas atividades extracurriculares com transformações biológicas e conteúdos de matérias distintas sem deixar que tais fatores influenciem de maneira direta o processo do aprendizado. O período compreendido entre a educação infantil e a 8ª série do Ensino Fundamental é de grande importância e significação para os estudantes que, ao adentrarem em um estabelecimento de ensino e sendo ainda crianças, trazem consigo muita vitalidade, criatividade, potencial de descoberta e transferência de conhecimento, além de estarem abertos a conhecer um mundo mágico, cheio de características inusitadas, sinais, códigos e regras que os cercam em um ambiente de aprendizagem.

Ao sair da educação infantil, a criança irá percorrer um período de 4 anos para efetivar sua alfabetização que será orientada, a cada ano, por um mesmo professor que ministrará aulas de diversas disciplinas, inclusive a Matemática. Nessa fase, o vínculo com o professor é muito intenso, sendo, por diversas vezes, superior ao vínculo familiar, pois a criança passa mais tempo em contato com o professor do que com os seus pais; sendo assim, a escola se torna um ambiente propício ao conhecimento e à descoberta de novos saberes, ora em bases científicas, ora em bases de senso comum, ora em função do próprio conhecimento, ora decorrente das relações afetivas estabelecidas na escola. Passado o período de alfabetização, essa criança irá percorrer uma segunda fase do Ensino Fundamental, que é o intervalo compreendido entre a 5ª e a 8ª séries.

Uma das principais mudanças decorridas nessa fase é a presença de diversos professores, com horários cronometrados, características, estilos, metodologias e posturas diferenciadas, proporcionando ao aluno, em um primeiro momento, confusão e desconforto durante o intervalo de uma aula para outra. Essa situação é bem representada na 5ª série, fase em que o aluno descobre uma nova rotina. Simultaneamente a essas transformações estruturais, a criança começa também a passar por transformações biológicas – o período da puberdade – em que o aluno, que fica aproximadamente 5 horas diárias na escola, reflete durante as aulas a sua mudança física: a consolidação de sua estrutura óssea, mudança na voz, aparecimento de pelos, crescimento dos seios,

inquietação e até mesmo mudança no humor decorrente desses processos que se desencadeiam em seu organismo, podendo influenciar de maneira significativa no seu rendimento escolar.

Trabalhar de maneira lúdica, utilizando os Jogos de Regras como ferramenta no ensino da Matemática, proporciona ao aluno o prazer de ser ativo, pensante, questionador e reflexivo, dando-lhe uma maior qualidade no que diz respeito à receptividade da disciplina. Como Mendonça (2001) menciona:

“Ensinar e aprender matemática pode e deve ser uma experiência feliz. Curiosamente quase nunca se cita a felicidade dentro dos objetivos educativos, mas é bastante evidente que só poderemos falar de um trabalho docente bem feito quando todos alcançarmos um grau de felicidade satisfatório (p.14)”.

Com essa afirmação do autor, infere-se que o ensino da Matemática pode ser realizado dentro de um ambiente divertido e sério, no qual a criação passa a ser um componente de esforço e autodesafio, possibilitando a construção e reelaboração do conhecimento.

Oliveira (1998) afirma que tanto o jogo quanto o problema podem ser vistos, no processo educacional, como introdutórios ou desencadeadores de conceitos ou como verificadores/aplicadores de conceitos já desenvolvidos e formalizados. O autor estabelece uma relação entre jogo e problema, afirmando que:

“O jogo tem fortes componentes da resolução de problemas na medida em que jogar envolve uma atitude psicológica do sujeito que, ao se predispor para isso, coloca em movimento estruturas do pensamento que lhe permitem participar do jogo [...] O jogo, no sentido psicológico, desestrutura o sujeito que parte em busca de estratégias que o levem a participar dele. Podemos definir jogo como um problema em movimento. Problema que envolve a atitude pessoal de querer jogar tal qual o resolvidor de problema que só os tem quando estes lhes exigem busca de instrumentos novos de pensamento (p.53)”.

O autor se refere a um jogo que possui fortes componentes de resolução de problemas. Nesse contexto, o jogo é descrito como uma atividade que requer uma atitude psicológica por parte do jogador, na medida em que ele precisa se predispor a enfrentar desafios e utilizar estratégias para participar do jogo. O jogo é visto como um problema em movimento, pois exige do jogador a busca por novas formas de pensar e a utilização de instrumentos de pensamento diferentes dos habitualmente utilizados. Portanto, o autor

descreve o jogo como uma atividade que desestrutura o sujeito, mas ao mesmo tempo o motiva a buscar soluções e desenvolver habilidades cognitivas.

## METODOLOGIA

1. Definição dos objetivos: Estabelecer claramente os objetivos do uso da Torre de Hanói, como desenvolver habilidades de raciocínio lógico, noções de sequência, identificação de padrões, entre outros aspectos matemáticos.
2. Seleção dos participantes: Escolher os alunos que participarão da atividade, considerando a faixa etária e o nível de conhecimento matemático dos estudantes.
3. Apresentação do jogo: Explicar aos alunos as regras e o funcionamento da Torre de Hanói, demonstrando como o jogo é jogado e como a lógica é aplicada para resolver o desafio.
4. Discussão prévia: Promover uma discussão inicial com os alunos, incentivando-os a refletir sobre estratégias possíveis para solucionar o jogo. Estimular a troca de ideias e a construção do conhecimento em grupo.
5. Aplicação prática: Distribuir os materiais necessários para que os alunos joguem a Torre de Hanói em sala de aula. Permitir que eles experimentem, explorem e resolvam o jogo de forma independente.
6. Observação e acompanhamento: Durante a atividade, observar e acompanhar atentamente o desempenho dos alunos, identificando suas dificuldades, progressos e estratégias utilizadas. Registrar as observações relevantes.
7. Discussão em grupo: Após os alunos terem jogado a Torre de Hanói, promover uma discussão em grupo para compartilhar as experiências, as estratégias utilizadas e os desafios enfrentados. Estimular a reflexão sobre os aspectos matemáticos envolvidos no jogo.
8. Reforço dos conceitos matemáticos: Utilizar o jogo como ponto de partida para abordar os conceitos matemáticos relacionados, como sequências numéricas, recursividade, combinações, entre outros. Explorar a relação entre o jogo e a matemática de forma didática.



9. Avaliação: Realizar uma avaliação formativa, por meio de perguntas, discussões em grupo ou pequenos projetos relacionados ao jogo e aos conceitos matemáticos trabalhados. Avaliar o progresso dos alunos e identificar possíveis lacunas de aprendizagem.

10. Reflexão final: Ao final da atividade, realizar uma reflexão sobre os resultados obtidos, as contribuições do jogo para o ensino da matemática e possíveis melhorias ou ajustes para futuras aplicações.

É importante ressaltar que a metodologia pode variar dependendo do contexto, do público-alvo e dos objetivos específicos do ensino da matemática. Portanto, adapte essa estrutura conforme necessário para atender às suas necessidades e às diretrizes da instituição de ensino.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

### MATERIAL UTILIZADO

O material utilizado para a aplicação da Torre de Hanói em sala de aula pode incluir os seguintes itens:

1. Torre de Hanói: É um conjunto de três pilares verticais, nos quais são colocados discos de tamanhos diferentes. Cada disco é encaixado em um pilar em ordem crescente de tamanho, do maior para o menor.

2. Discos: São peças planas de diferentes tamanhos e diâmetros, que são empilhadas nos pilares da Torre de Hanói. Geralmente, os discos são coloridos para facilitar a identificação.

3. Pilares: São estruturas verticais onde os discos são empilhados. Geralmente, são três pilares, mas também é possível adaptar o jogo com um número diferente de pilares para aumentar a complexidade.

4. Espaço físico: É necessário ter uma área de trabalho adequada em sala de aula, com mesas ou superfícies planas para colocar a Torre de Hanói e permitir que os alunos joguem confortavelmente.

5. Recursos de apoio: Podem ser utilizados recursos adicionais, como cartazes, folhas de papel, quadro branco ou projetor, para explicar as regras do jogo, ilustrar estratégias, representar as jogadas dos alunos ou reforçar os conceitos matemáticos relacionados.

É importante ressaltar que a Torre de Hanói pode ser adaptada com diferentes materiais. Em versões mais simples, é possível utilizar copos, canetas ou outros objetos empilháveis para representar os pilares e discos. A chave é garantir que os materiais utilizados sejam adequados para a manipulação pelos alunos e permitam a compreensão do jogo e dos conceitos matemáticos envolvidos.

Além disso, é importante ter múltiplas cópias da Torre de Hanói ou materiais alternativos, caso a atividade seja realizada em grupos pequenos ou em diferentes turmas, para que cada grupo de alunos possa jogar e explorar o jogo de forma independente.

## FASE DE ELABORAÇÃO

A fase de elaboração na utilização da Torre de Hanói em sala de aula, no ensino da matemática através de um jogo lúdico, envolve a preparação e o planejamento da atividade. Essa fase inclui os seguintes passos:

1. Objetivos claros: Definir os objetivos específicos que serão trabalhados com a Torre de Hanói, como desenvolvimento do raciocínio lógico, compreensão de sequências numéricas, identificação de padrões, entre outros aspectos matemáticos.

2. Contextualização do jogo: Apresentar aos alunos o contexto histórico do jogo da Torre de Hanói, destacando sua origem, importância e desafios que ele propõe. Isso pode envolver histórias ou lendas relacionadas à Torre de Hanói, despertando o interesse e a curiosidade dos estudantes.

3. Explicação das regras: Detalhar as regras do jogo, enfatizando como os discos são movimentados entre os pilares. Explicar que a meta é transferir todos os discos de um pilar inicial para um pilar final, seguindo as regras de movimentação, com o menor número possível de jogadas.

4. Apresentação dos níveis de dificuldade: Discutir com os alunos as diferentes configurações da Torre de Hanói, que podem variar o número de discos utilizados e o número de pilares. Apresentar os níveis de dificuldade e permitir que os alunos escolham qual desafio desejam enfrentar, levando em consideração seu nível de habilidade e conhecimento matemático.

5. Estratégias de resolução: Explorar com os alunos as estratégias possíveis para resolver a Torre de Hanói, como o uso de tentativa e erro, a identificação de padrões de movimento ou a aplicação de técnicas matemáticas específicas. Incentivar a discussão e o compartilhamento de estratégias entre os alunos.

6. Adaptação do jogo: Caso necessário, adaptar o jogo da Torre de Hanói para atender às necessidades específicas da turma. Isso pode envolver a utilização de materiais alternativos, como copos, canetas ou outros objetos empilháveis, ou a modificação das regras para tornar o jogo mais acessível ou desafiador, dependendo do grupo de alunos.

7. Preparação dos materiais: Garantir que os materiais necessários para jogar a Torre de Hanói estejam prontos e acessíveis em sala de aula. Certificar-se de que cada grupo de alunos tenha sua própria Torre de Hanói ou materiais alternativos, se necessário.

8. Sequência de atividades: Planejar a sequência de atividades relacionadas ao jogo da Torre de Hanói, incluindo momentos de exploração individual ou em grupo, discussões em sala de aula, atividades de registro ou reflexão sobre as estratégias utilizadas e os conceitos matemáticos envolvidos.

Durante a fase de elaboração, teve as práticas teste I e II. Adaptar as atividades e os desafios propostos de acordo com o nível de conhecimento e habilidades matemáticas

## PRÁTICA TESTE I

O ensino da Matemática está diretamente ligado ao desenvolvimento de atividades lúdicas, no intuito de estimular as crianças e os jovens. Com a implantação dos jogos no cotidiano do educando verificou-se uma evolução no aprendizado da Matemática. Os PCN's defendem e indicam a utilização de ferramentas lúdicas na educação, pois eles valorizam a criatividade do aluno, a partir do momento que a procura pela solução é

desenvolvida de forma livre. Cada aluno apresenta sua forma de resolução com todos chegando à resposta ideal.

A torre de Hanói constitui num jogo estratégico capaz de contribuir no desenvolvimento da memória, do planejamento e solução de problemas através de técnicas estratégicas. O jogo se apresenta em uma base que possui três pinos na posição vertical. No primeiro pino temos uma sequência de discos com ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O objetivo é passar todos os discos para o último pino com a ajuda do pino central, de modo que no momento da transferência o pino de maior diâmetro nunca fique sobre o de menor diâmetro. O jogo mais simples é constituído de três pinos, mas a quantidade pode variar, deixando o jogo mais difícil à medida que os discos aumentam.

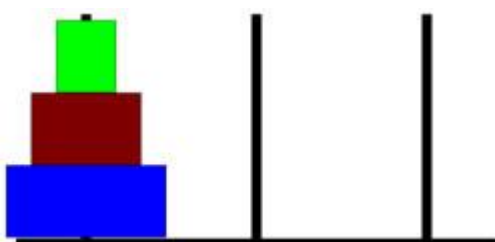
Este jogo pode ser utilizado a partir das séries iniciais do Ensino Fundamental, no intuito de aprimorar a coordenação motora, identificação de cores, noção de ordem crescente e decrescente. Nas séries mais adiantadas, como 6º, 7º e 8º, o jogo será usado no intuito do estabelecimento de estratégias na transferência de peças, na contagem dos movimentos e no raciocínio lógico. Ele também cria uma situação envolvendo o número mínimo de movimentos necessários através da seguinte expressão matemática:  $2^n - 1$ , onde n corresponde ao número de discos. Por exemplo:

$$\text{Três discos} = 2^3 - 1 = 7$$

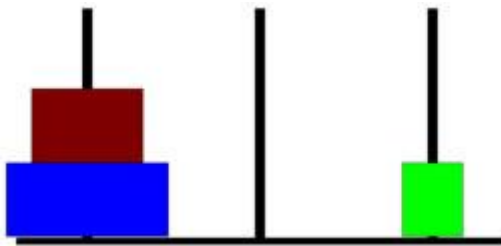
$$\text{Quatro discos} = 2^4 - 1 = 15$$

$$\text{Cinco} = 2^5 - 1 = 31$$

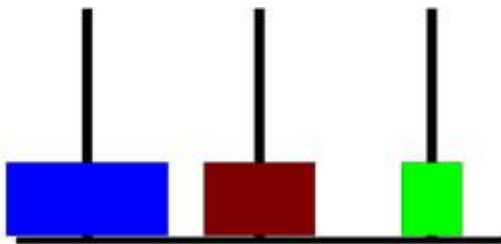
Veja os possíveis movimentos utilizando três discos:



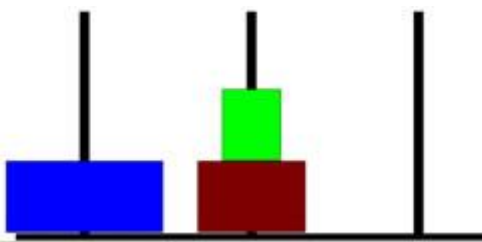
### 1º movimento



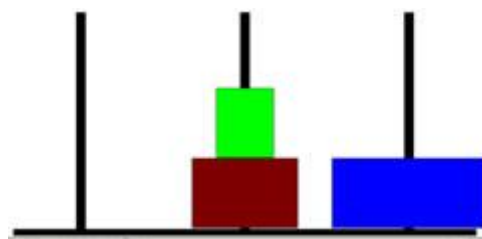
### 2º movimento



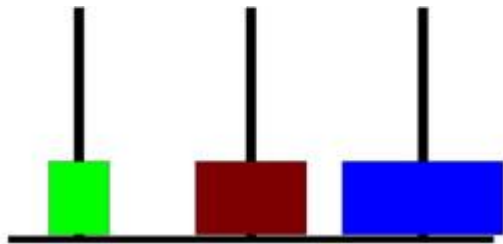
### 3º movimento



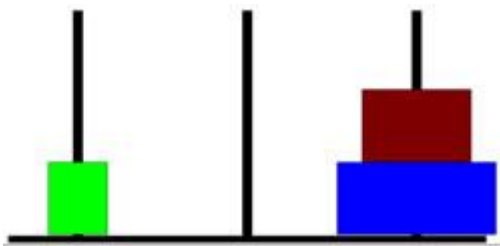
### 4º movimento



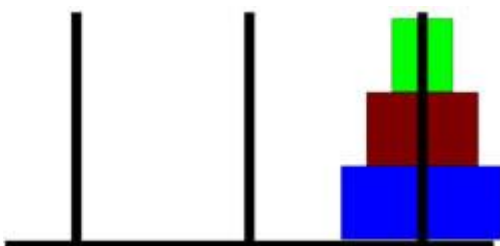
### 5º movimento



### 6º movimento



### 7º movimento



## PRÁTICA TESTE II

Para essas práticas experimentais a aprendizagens relacionadas ao campo da probabilidade se concretizem, é preciso, primeiramente, transformar em experiências o que muitas vezes é simplesmente imposto com regras no livro de matemática na prática. É propondo jogar moeda e botões diversas vezes, discutir e refletir sobre isso, por



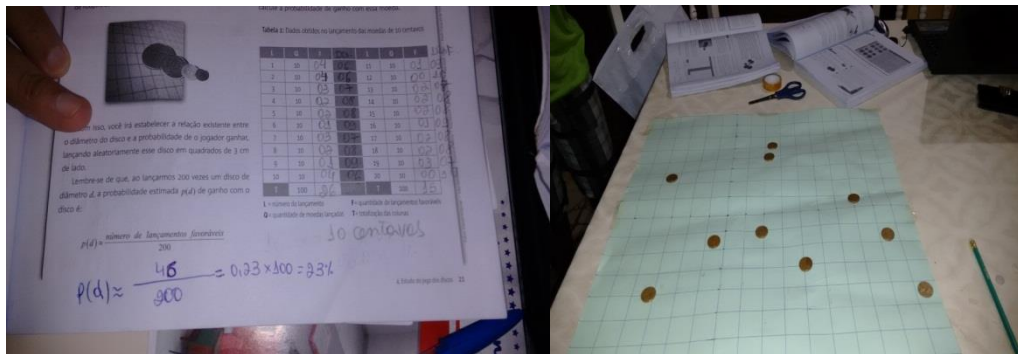
exemplo, que a docente vai observar e elaborar conjecturas sobre como e por que se define que a chance observação de um jogo favorável e desfavorável.

### 1º etapa

Uma vez construído o quadriculado, vamos inicialmente lançar moedas de 10 centavos como os discos.

Realizei um lançamento com dez moedas de 10 centavos simultaneamente, considerando que a moeda de 10 centavos tem dois centímetros de diâmetro. Fez-se esse processo 20 vezes e anotou os resultados para fazer o cálculo da probabilidade para ver os acertos.

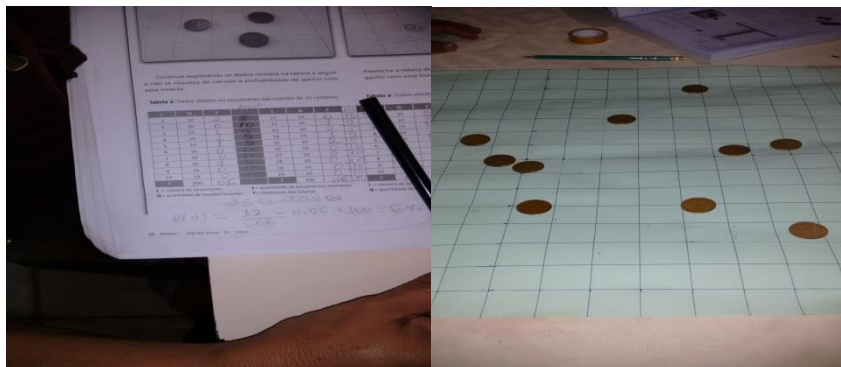
$$P(d) \approx 46/200 = 0,23 \times 100 = 23\%$$



### 2º etapa

Prosseguindo com a experiência, fazendo os lançamentos aleatoriamente com dez moedas de 25 centavos (discos de 2,5 cm de diâmetro).

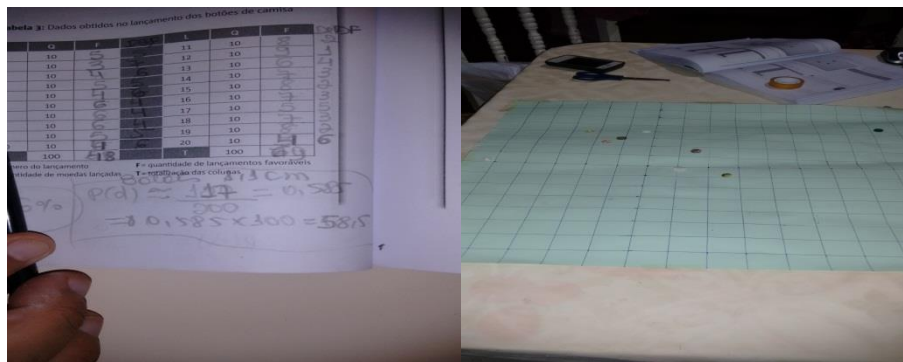
$$P(d) \approx 12/200 = 0,06 \times 100 = 6\%$$



### 3º etapa

Fazendo agora lançamento aleatório, utilizando dez botões médios (discos com 1,1 cm de diâmetro).

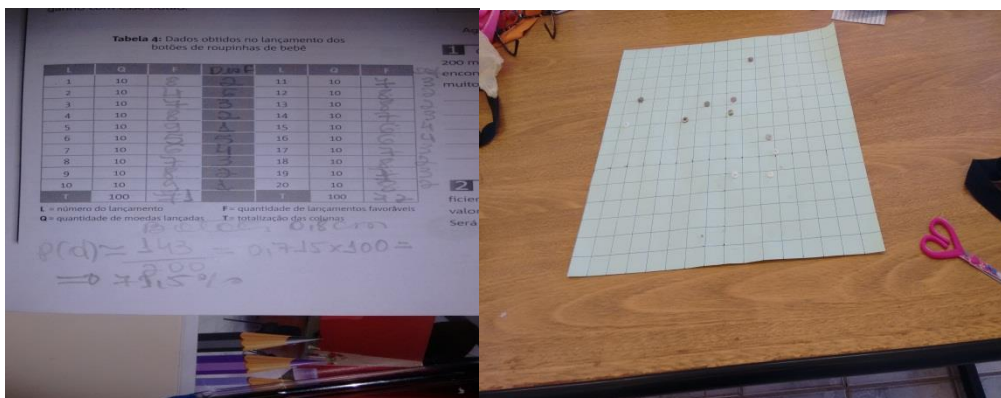
$$P(d) \approx 117/200 = 0,585 \times 100 = 58,5\%$$



### 4º etapa

Finalizando o lançamento aleatório utilizando dez botões pequenos (discos com cerca de 0,8 cm de diâmetro).

$$P(d) \approx 143/200 = 0,715 \times 100 = 71,5\%$$



Pode-se observar que os botões que tem o menor diâmetro os lançamentos são mais favoráveis, assim como as moedas de 10 centavos.

Nessas conclusões estão mostrados as práticas teste I (o jogo em desenvolvimento em atividade lúdicas) e II (a prática experimental) que são valores numéricos para a probabilidade de penetração da barreira, calculadas pelos dois modelos, para vários valores de campo elétrico no intervalo entre  $10^6$  e  $10^8$  V/cm e para dois valores da função

trabalho (3 e 5 e V). Vemos que a probabilidade de penetração depende fortemente da função trabalho, já que pequenas alterações no valor da sua magnitude faz a probabilidade de tunelamento mudar por várias ordens de grandeza. Observamos igualmente uma forte dependência do campo elétrico já que pequenas alterações no valor dessa grandeza também muda a probabilidade de tunelamento por várias ordens de grandeza.

Vemos também que a probabilidade de tunelamento calculada pelo modelo 1 é menor do que a calculada pelo modelo 2. Os relatos de caso / séries de casos apresentaram média do número de citações e probabilidade de citação menores que os demais desenhos de estudo. Os resultados deste estudo sugerem que os conselhos editoriais devem publicar apenas relatos de caso / séries de casos originais ou muito raros que tenham repercussão s resultados do modelo 2 são próximos dos calculados na Ref. [16]

Concluimos que as moedas de 10 e 25 centavos, são pouco prováveis a serem favoráveis nos ladrilhos, devido os seus ângulos serem maiores que os botões que, por terem ângulos menores, obtiveram maior quantidade de acertos favoráveis.

Verifica-se com isso que, faz-se notório a diferença entre as moedas de 10 e 25 centavos, na prática exercida e quantidade de acertos com moedas de 10 centavos favoráveis e a quantidade de não acertos com moedas de 25 centavos. Com relação aos botões, os acertos foram bem maiores, pois, os seus ângulos pequenos, muito contribuíram para isso. Quanto a mais o objeto for lançado, a razão entre o número e o total de lançamentos se aproxima de 50/100 (e o mesmo ocorre com a razão entre o número no total de lançamentos da moeda e botões), o que revela que a grandeza de denominadores influencia a probabilidade. "Quanto mais realizamos um experimento probabilístico, mais nos aproximamos do real".

## CONCLUSÃO FINAL

A utilização da Torre de Hanói em sala de aula, no ensino da matemática através de um jogo lúdico, apresenta resultados significativos e positivos. Ao longo deste trabalho, exploramos como esse jogo pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades matemáticas, como raciocínio lógico, sequências numéricas e identificação de padrões.

Durante a aplicação da Torre de Hanói, observamos que os alunos se envolvem de maneira ativa e motivada, pois o jogo despertou seu interesse e curiosidade. Eles são desafiados a pensar estrategicamente, a tomar decisões e a experimentar diferentes abordagens para solucionar o problema proposto. Essa abordagem lúdica estimula a autonomia, a criatividade e a resiliência dos estudantes, promovendo uma aprendizagem mais significativa e prazerosa.

Além disso, a Torre de Hanói oferece uma oportunidade para os alunos aplicarem os conceitos matemáticos aprendidos em sala de aula de forma prática e concreta. Eles podem visualizar e experimentar as propriedades das sequências numéricas, as relações de ordem e os princípios de recursividade. Essa conexão entre a teoria matemática e a aplicação prática fortalece a compreensão dos alunos e facilita a transferência dos conhecimentos adquiridos para outras situações.

Os benefícios da utilização da Torre de Hanói vão além do ensino da matemática. Esse jogo também promove o desenvolvimento de habilidades socioemocionais, como trabalho em equipe, comunicação, persistência e resolução de problemas. Os alunos aprendem a lidar com desafios, a superar obstáculos e a buscar soluções de forma colaborativa, o que contribui para seu crescimento pessoal e social.

No entanto, é importante ressaltar que a implementação da Torre de Hanói em sala de aula requer um planejamento cuidadoso, adaptado às características da turma e aos objetivos educacionais. É fundamental proporcionar um ambiente de aprendizagem seguro e estimulante, no qual os alunos se sintam encorajados a experimentar, errar e aprender com seus erros.

Em conclusão, a Torre de Hanói é uma ferramenta valiosa para o ensino da matemática de maneira lúdica e envolvente. Ao jogar esse desafio, os alunos desenvolvem habilidades matemáticas, socioemocionais e cognitivas de forma integrada, consolidando conceitos, construindo conhecimento e se tornando protagonistas de sua própria aprendizagem. A utilização desse jogo lúdico traz benefícios significativos para o processo de ensino-aprendizagem e para o desenvolvimento integral dos estudantes.

## REFERÊNCIAS

BOHM, D. **Quantum Theory** (Prentice-Hall, New Jersey, 1960).

LOPES, C. E. **O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores**. Caderno CEDES vol.28 n.74 Campinas Jan./Apr. 2008.

MANUAL DO CURSISTA. **Módulo I**.– (Matemática na prática. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio). Vários Autores: Cuiabá, MT: Central de texto, 2013.

KIRNER, Claudio. 2007.

Site:

(1) <http://www-groups.cs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/Mathematicians/Lucas.html>

(2) <http://www.cs.wm.edu/%7Epkstoc/toh.html>

(3) <http://greschak.com/twlegend.htm>

(4) <http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/3900/sun.htm>

(5) <http://www.haubergs.com/scripts/hanoi/hanoi.html>

(6) [http://puzzlemuseum.com/month/picm07/2007-03\\_hanoi.htm](http://puzzlemuseum.com/month/picm07/2007-03_hanoi.htm)

Submissão: junho de 2023. Aceite: setembro de 2023. Publicação: outubro de 2023.